数学 III　複素数平面　(https://examist.jp/category/mathematics/complex-plane/)

1. 複素数の図形的意味, 座標平面上の点の 90° 回転移動
2. 複素数の実数倍と加法・減法, 複素数平面の平行四辺形
3. 共役複素数の図形的意味と性質, 複素数の実数条件・純虚数条件
4. 複素数の絶対値の性質, 余弦定理の複素数表示
5. 方程式の実数解と虚数解
6. 極形式（複素数の極座標表示）
7. 複素数の積・商と極形式
8. 複素数の積・商の図形的意味（拡大・縮小, 回転）, 原点以外の点を中心とする回転移動
9. ド・モアブルの定理と複素数の n 乗
10. ド・モアブルの定理と累乗の等式を満たす整数
11. ド・モアブルの定理による 3 倍角の公式・三角関数の等式の証明
12. ド・モアブルの定理と三角関数の和　$\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta, \quad \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$
13. 複素数の n 乗根とその図形的意味
14. 1 の n 乗根の性質
15. 線分の内分点・外分点と三角形の重心を表す複素数
16. 2 直線のなす角, 共線条件, 垂直条件
17. 複素数の等式が表す三角形の形状決定
18. 3 点が正三角形を作る条件と三角形の相似条件
19. 複素数平面上の直線の方程式（垂直二等分線と円の接線の方程式）
20. 複素数平面上の円の方程式（アポロニウスの円）
21. 円周上を動く複素数の絶対値と偏角の範囲
22. 原点を通る直線に関する対称点
23. 三角形の外心を表す複素数
24. 三角形の内心を表す複素数
25. 三角形の垂心を表す複素数　$z = \alpha + \beta + \gamma$
26. 4 点が同一円周上にある条件（共円条件）
27. 複素数による図形の性質の証明
28. 変換 $w = \alpha z + \beta$ による像
29. 反転変換 $w = \dfrac{1}{z}$ による像
30. 1 次分数変換 (メビウス変換) $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ による像
31. ジューコフスキー変換 $w = z + \dfrac{a^2}{z}$ による像
32. 複素数列（回転と拡大を繰り返す点の移動）
33. 特殊解型漸化式で定まる複素数列が通る円と極限

学習のアドバイス

複素数は平面上の点とみなすことができる．これにより，複素数を図形的に考えることが可能になる．逆に，図形を複素数で考えることも可能になる．新しい考え方に最初は戸惑うかもしれないが，学習を進めていくと複素数平面の意義がわかってくる．

当ファイルでは，**複素数平面のパターンを網羅する．**ごく一部を除き，基本から標準レベルの内容である．

複素数の単純計算については，数 II の複素数と方程式分野で学習済みである．また，図形的考察においてはベクトルの知識が重要になる．

高校数学において複素数平面の最も大きなメリットは，回転移動に強いことである．20 年前と異なり，現在は行列を学習しなくなったため，図形の回転移動は複素数平面で考えるしかない．三角関数で考えられなくもないが，複素数平面に比べるとかなり面倒になる．

複素数平面の問題の解法は大きく 4 つに分けられるので，それぞれのメリット・デメリット，使い分けを学習していくことになる．

1. z のまま処理する．簡潔に済むことが多いが，複素数平面特有の変形に慣れが必要になる．
2. 極形式 (複素数の極座標表示) を利用する．回転と n 乗に強いが，三角関数の計算が大変になることが多い．
3. 図形的意味を考える．簡潔に済むが，式と図形の対応関係の深い理解を要する．
4. $z = x + yi$ として計算する．万能に近いが，計算量がかなり多くなる．

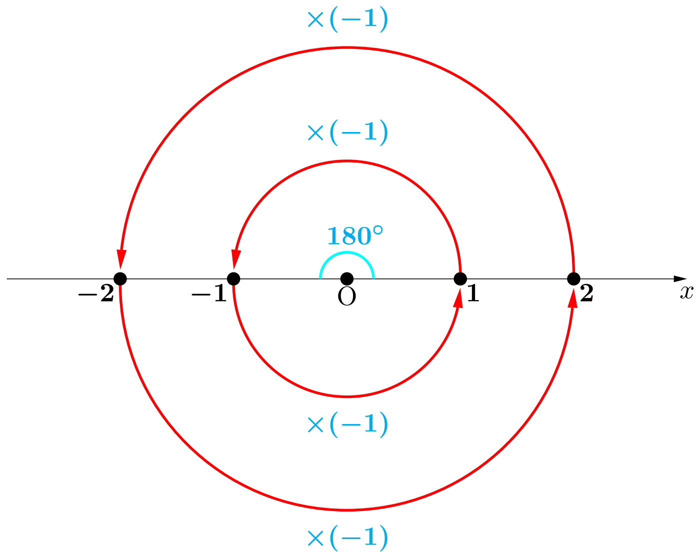
数 III の学習はどうしても微分・積分が中心になるため，複素数平面の学習は不足気味になっている学生が多い．しかし，大学入試での出題率が低いわけではないので，しっかりと学習しておくことを推奨する．

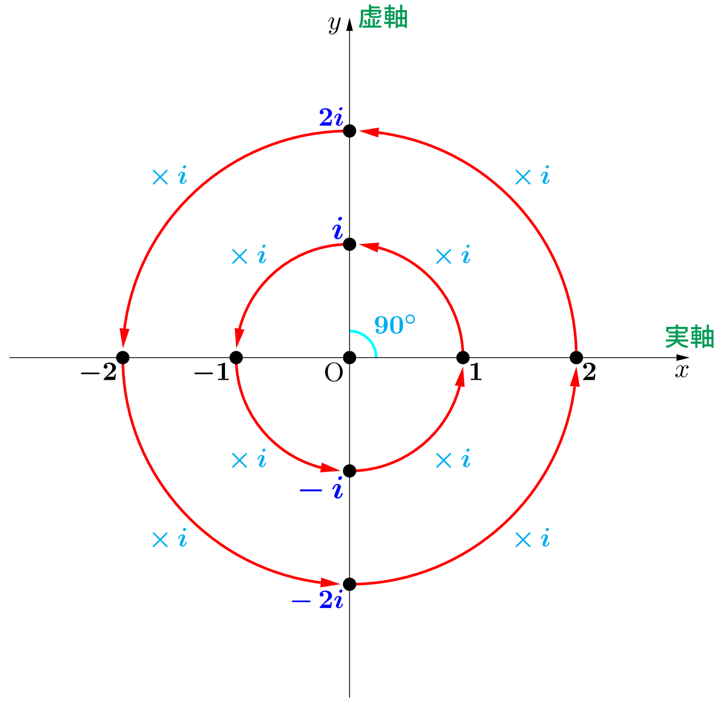
1. 複素数の図形的意味

すべての実数は数直線上の点と 1 対 1 に対応する. $\boldsymbol{1\times(-1)=-1},\ \boldsymbol{2\times(-1)=-2}$ を数直線上で考えよう.
-1 を掛けることで, 数直線上の点 1 は原点に関して対称な点 -1 に移される.
同様に, 数直線上の点 2 は原点に関して対称な点 -2 に移される.
よって, **-1 を掛けることを, 原点を中心とする 180°の回転とみなす** ことができる (左図).

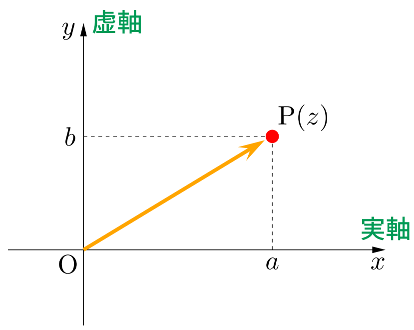
また, さらに -1 を掛けると元の点に戻ってくる. つまり, $(-1)\times(-1)$ は 180° 回転を 2 回 (360° 回転) することに対応している.

そういえば, $\boldsymbol{i\times i=-1}$ であった.
$\times(-1)$ が 180° 回転 ならば, **$\times i$ は 90°回転** と考えるのが**自然**ではないか.
よし, **数直線上の点 1 を 90° 回転した点を i と決めよう.**





同様にして y 軸上に点 $-i,\ 2i,\ -2i$ などをとることができる.
実数を表す x 軸を **実軸**, **純虚数**を表す y 軸を **虚軸** という.
このように虚軸を定義すると, 複素数に合理的な形で図形的意味付けをなすことができる.
結局, **すべての複素数 z は座標平面上の点と 1 対 1 に対応する.**
例えば, $z=a+bi$ は点 $(a,\ b)$ と対応する.



数 (実数) を表す直線が「数直線」である. これに対し, **数 (複素数) を表す平面が「数平面」**, すなわち**複素数平面**なのである.

$\boldsymbol{z=a+bi}\,(a,\ b:$ 実数$)$ で表される数を **複素数** という. $b=0$ のときは実数になる.
$b\neq0$ のもの $(2i,\ 1+3i$ など$)$ を **虚数** という. つまり, 実数ではないものが虚数である.
$b\neq0$ のものの中で $a=0$ のもの $(2i,\ -3i$ など$)$ を特に **純虚数** という.

$\times i$ が反時計回りに 90° 回転することに対応する. **$\times(-i)$ が時計回りの 90° 回転 (反時計回りに $-90°$ 回転)** に対応していることも確認しておこう.
例えば, $i\times(-i)=1$ は, 点 i が反時計回りに $-90°$ 回転して 1 に戻ることを意味している.

複素数は, 1 つの数で 2 次元である平面と対応している. 言い換えると, **1 つの複素数の中には 2 つの情報が含まれている.**
これは, 平面上の 1 つのベクトル $\vec{a}$ が 2 つの成分の情報 $(a_1,\ a_2)$ を含んでいたことに類似している.
つまり, **$z=a+bi$ は, 原点を始点とする位置ベクトル $\vec{z}=(a,\ b)$ とも考えられる.**
今後, **ベクトルとの関連性を常に意識しながら複素数を幾何的に考察する** ことになる.

複素数平面の世界の探索の前に, まずは次の問題で複素数平面の意義を実感してほしい.